Opción A

Ejercicio nº 1 de la opción A de *junio* de 1999

Considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en la forma $f(x) = 1 + x\cdot|x|$.

(a) [1 punto] Halla la derivada de f.

(b) [0'5 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

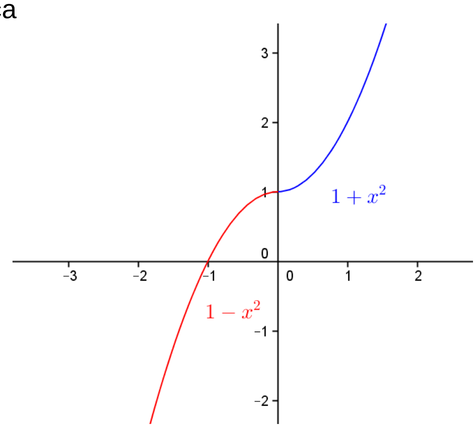
(c) [1 punto] Calcula $\int_{-1}^{2} xf(x)dx$.

Solución

(a)

$$f(x)=1+x|x|=\begin{cases} 1+x(x) & \text{si} \quad x \ge 0 \\ 1+x(-x) & \text{si} \quad x<0 \end{cases}=\begin{cases} 1+x^2 & \text{si} \quad x \ge 0 \\ 1-x^2 & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

aunque no lo piden es util la gráfica



(a)

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x>0 \\ -2x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$, tenemos que ver si existe f' (0) para lo cual f' (0^+) = f' (0^-), pero

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0}(2x)=2(0)=0$; $f'(0^-)= \lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0}(-2x)=-2(0)=0$. Estamos viendo la continuidad de la derivada, por tanto como f' (0^+) = f' (0^-) = 0, existe f' (0) = 0, y la función derivada será:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \ge 0 \\ -2x & \text{si} \quad x<0 \end{cases}$$

(b)

Si x > 0, f '(x) = 2x > 0 , luego f(x) siempre es creciente para x > 0

Si x < 0, f '(x) = -2x > 0, luego f(x) siempre es creciente para x > 0, por tanto la función siempre es creciente.

(c)

Teniendo en cuenta que la función es por ttozos, tenemos que descomponer la integral como suma de dos integrales, poniendo en cada una la rama correspondiente

$$\int_{-1}^{2} xf(x)dx=\int_{-1}^{0} xf(x)dx+\int_{0}^{2} xf(x)dx=\int_{-1}^{0} x(1-x^2)dx+\int_{0}^{2} x(1+x^2)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}(x-x^3)dx+\int_{0}^{2}(x+x^3)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{2}=$$

=[(0) – (1/2 – ¼)] + [(2 +4) – (0)] = -1/4 +6 = 23/4

Ejercicio nº 2 de la opción A de junio de 1999

[2'5 puntos] De la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en x = 1, un punto de inflexión en (0,0) y que $\int_{0}^{1} f(x)dx=\frac{5}{4}$ Calcula a, b, c y d.

Solución

Como tiene un máximo en x = 1 tenemos f '(1) = 0.

Como tiene un punto de inflexión en (0,0) tenemos f(0) = 0 y tambien f ''(0) = 0

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, $\quad f'(x) = 3ax^2+2bx+c$; $\quad f''(x) = 6ax + 2b$

De f ''(0) = 0 tenemos 0 = 0+2b, de donde b = 0

De f(0) = 0 tenemos 0 = 0+0+0+d, de donde d = 0

De f '(1) = 0 tenemos 0 = a + c, de donde a = -c

De los datos anteriores tenenos que la función $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d = ax^3 +cx$

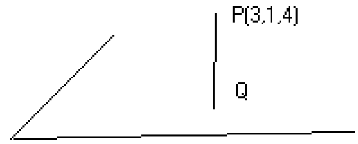
$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{5}{4}=\int_0^1 (ax^3+cx)dx=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{cx^2}{2}\right]_0^1=\frac{a}{4}-\frac{c}{2}=\frac{5}{4}$$

Operando obtenemos a – 2c = 5, de donde c = - 5/3, y a = - c = 5/3.

Ejercicio nº 3 de la opción A de junio de 1999

[2'5 puntos] Halla el punto del plano de ecuación x – z = 3 que está más cerca del punto P = (3,1,4) así como la distancia entre el punto P y el plano dado.

Solución



$\Pi \equiv x - z - 3 = 0$.

El punto mas cercano al plano es el que está en la recta perpendicular a Π, por el punto P y calculando posteriormente su intersección con dicho plano.

Recta r $\perp$ a Π por el punto P, su vector director es el normal del plano **v**=(1,0,-1)

$$r \equiv \frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-4}{-1}=\lambda \quad \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=1 \\ z=4-\lambda \end{cases}$$

El punto Q = r $\cap$ Π

$(3+\lambda) - (4 - \lambda) - 3 = 0$. Operando se obtiene $\lambda = 2$

Punto Q(3+2, 1, 4-2) = (5,1,2)

$\overrightarrow{PQ}=(5-3,0,2-4)=(2,0,-2)$

d(P,Π) = d(P,Q) = √(4+0+4) = √8 u.l., donde "√" indica la raíz cuadrada.

Ejercicio nº 4 de la opción A de junio de 1999

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix}$ donde a, b y c son no nulos.

(a) [1 punto] Determina el número de columnas de A que son linealmente independientes.

(b) [1'5 puntos] Calcula el rango de A y razona si dicha matriz tiene inversa.

Solución

(a)

El numero de columnas linealmente independientes de la matriz coincide con el número de sus filas linealmente independientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{vmatrix}=a.b.c\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}=0$$

Como |A| = 0, el rango no es 3 y no tiene 3 filas independientes, a los suno tendrá dos. Veamoslo

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & -b & 3c \\ 3a & 0 & 4c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -3b & c \\ 0 & -3b & c \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & -3b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

luego tiene 2 filas linealmente independientes.

(b)

Como el rango(A) = 2 = n º de filas linealmente independienes.

Como rango(A) $\neq$ 3, y |A| = 0, la matriz A no tiene inversa.

Opción B

Ejercicio nº 1 de la opción B de junio de 1999

(a)[1 punto] Dibuja la región limitada por la curva de ecuación y = x(3 – x), y la recta de ecuación y = 2x – 2.

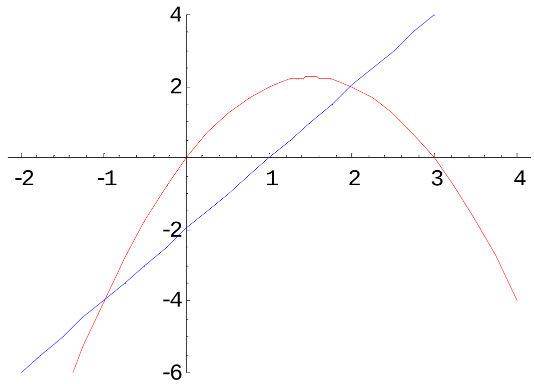
(b) [1'5 puntos] Halla el área de la región descrita en el apartado anterior.

Solución

(a)

$y = x(3 - x) = 3x - x^2$, es un parábola (gráfica en rojo), necesitamos sus cortes, su vértice y sabemos que sus

ramas van hacia abajo. Cortes (0,0), (3,0), V(3/2, 9/4)
y = 2x – 2 es una recta (gráfica en azul) y con dos valores es suficiente para dibujarla



(b)

$\text{Area}=\int_a^b\left[(3x-x^2)-(2x-2)\right]dx$, donde a y b son las soluciones de $3x - x^2 = 2x - 2$, es decir de la ecuación $x^2 - x - 2 = 0$

$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases}2=b\\-1=a\end{cases}$, luego:

$$\text{Area}=\int_{-1}^{2}\left[(3x-x^2)-(2x-2)\right]dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{2}=\left[\left(\frac{-8}{3}+2+2\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\right]=\frac{5}{2}\quad \text{u.a.}$$

Ejercicio nº 2 de la opción B de junio de 1999

[2'5 puntos] Dada la función f : (1,e] → R definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\text{Ln}(x)$ (donde Ln(x) es el logaritmo neperiano de x), determina cuál de las rectas tangentes a la gráfica de f tiene la máxima pendiente.

Solución

La recta tangente que tiene la máxima pendiente, se obtiene calculando los extremos de f '(x) puesto que la pendiente de la tangente es f ', y sus máximos son los extremos de f ''

$f(x)=\frac{1}{x}+\text{Ln}(x)$, $f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$, $f''(x)=\frac{1(x^2)-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{-x^2+2x}{x^4}$

f ''(x) = 0, nos da $-x^2 + 2x = 0 = x(-x + 2)$, portanto tiene como soluciones $x = 0 \notin [1,e]$ y $x = 2 \in [1,e]$. Por tanto el punto es x = 2. Comprobemos en la 3ª derivada que efectivamente es máximo, y despues calcularemos la recta tangente en x = 2 que es la de la máxima pendiente

$f'''(x)=\frac{(-2x+2)x^4-(-x^2+2x).4x^3}{x^8}$, $f'''(2)=\frac{-}{+}=-<0$, luego en x = 2 hay un máximo.

La recta tangente es y – f(2) = f '(2).(x – 2). Como f(2) = 1/2 + ln(2), y f '(2) = 1/4 resulta que la recta tangente es y – (1/2 + ln(2)) = (1/4)·(x – 2)

Ejercicio nº 3 de la opción B de junio de 1999

Sean los vectores **u** = (-1,2,3), **v** = (2,5,-2), **x** = (4,1,3) y **z** = (4,1 –8).

(a) [1 punto] ¿Se puede expresar x como combinación lineal de u y v? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica el porqué.

(b) [1 punto] ¿Se puede expresar z como combinación lineal de u y v? Si es así, escribe dicha combinación lineal; si no es así, explica el porqué.

(c) [0'5 puntos] ¿Son u, v y z linealmente independientes? Justifica la respuesta.

Solución

(a)

x se puede poner como combinación lineal de **u** y **v** sii det(**x**,**u**,**v**) = 0

$\det(x,u,v)=\begin{vmatrix}4&1&3\\-1&2&3\\2&5&-2\end{vmatrix}=-99\neq 0$, luego son independientes.

(b)

z es combinación lineal de **u** y **v** sii det(**z**,**u**,**v**) = 0

$\det(z,u,v)=\begin{vmatrix}4&1&-8\\-1&2&3\\2&5&-2\end{vmatrix}=0$, luego a**z** +b**u** +c**v** = **0.** Desarrollando

a(4,1,-8)+b(-1,2,3)+c(2,5,-1) = (0,0,0)
(4a-b+2c, a+2b+5c, -8a+3b-2c) = (0,0,0). Igualando tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 4a-b+2c=0 \\ a+2b+5c=0 \\ -8a+3b-2c=0 \end{cases}$$

Como son linealmente dependientes el determinate de la matriz de los coeficientes es 0, por tanto solo dos ecuaciones son linealmente independientes. Elegimos las siguientes:

$\begin{cases} 4a-b+2c=0 \\ a+2b+5c=0 \end{cases}$, de donde tomando c = λ, resulta $\begin{cases} 4a-b=-2\lambda \\ a+2b=-5\lambda \end{cases}$, y por Cramer tenemos

$$a=\frac{\begin{vmatrix} -2\lambda & -1 \\ -5\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{\lambda}{9}, \quad y \quad b=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -2\lambda \\ 1 & -5\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{-18\lambda}{9}$$

Tomando λ = 9, tenemos a = 1, b = -18 y c = 9, y la relación de dependencia es 1**z** –18**u** +9**v** = **0**

(c)

el apartado (b) nos dice que son linealmente dependientes, luego no pueden ser linealmnete independientes.

Ejercicio nº 4 de la opción B de junio de 1999

(a) [2'5 puntos] Calcula un punto R de la recta s dada por $s \equiv \begin{cases} x-y-5=0 \\ x-3y-z-7=0 \end{cases}$ que equidiste de los puntos P = (1,0,-1) y Q = (2,1,1).

(b) [0'5 puntos] Calcula el área del triángulo determinado por los puntos P, Q y R.

Solución

(a)

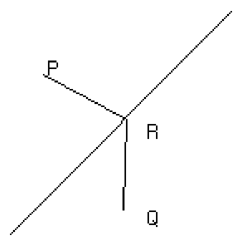
Si equidistantan d(P,R) = d(Q,R). Ponemos la recta **s** en paramétricas:
x = λ, con lo cual y = x – 5 = -5 + λ;   z = -7 + x - 3y = -7 + λ -3(-5 + λ) = 8 - λ
luego el punto R tiene de coordenadas R(x,y,z)=(λ,-5+λ,8-2λ)

$\vec{PR}$=(λ-1, -5+λ-0, 8-2λ+1)=(λ-1, λ-5, 9-2λ); $\vec{QR}$=(λ-2, -5+λ-1, 8-2λ-1)=(λ-2, λ-6, 7-2λ)

$$d(P;R)=|\vec{PQ}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+(\lambda-5)^2+(9-2\lambda)^2}\;; \quad d(Q;R)=|\vec{QR}|=\sqrt{(\lambda-2)^2+(\lambda-6)^2+(7-2\lambda)^2}$$

Igualando ambas expresiones y simplificando obtenemos -4λ = - 18, de donde λ= 18/4 = 9/2., y el punto es R(9/2 , -5 + 9/2 , 8 – 2.9/2) = (9/2 , - 1/2 , - 1)

(b)



$$\text{Area del triángulo}=\frac{1}{2}\left|\vec{RP}\times\vec{RQ}\right|$$

$$\vec{RP}=(1-\frac{9}{2}, 5-\frac{9}{2}, 2.\frac{9}{2}-9)=(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0)\,, \quad \vec{RQ}=(2-\frac{9}{2}, 6-\frac{9}{2}, 2.\frac{9}{2}-7)=(-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2)$$

$$\vec{RP}\times\vec{RQ}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7/2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{-5}{2} & \frac{3}{2} & 2 \end{vmatrix}=i\begin{vmatrix} 1/2 & 0 \\ 3/2 & 2 \end{vmatrix}-j\begin{vmatrix} -7/2 & 0 \\ -5/2 & 2 \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} -7/2 & 1/2 \\ -5/2 & 3/2 \end{vmatrix}=(1, 7, -4)$$

$$\text{Area del triángulo}=\frac{1}{2}\left|\vec{RP}\times\vec{RQ}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{1+49+16}=1/2\sqrt{66} \quad u.a.$$